

Optimalno določanje stabilnih območij vibracij zobniških gonil

Optimal determination of stability domains of vibrations in gear drives

Rudolf Pušenjak^{1*}

¹ Fakulteta za industrijski inženiring Novo mesto/Šegova ulica 112, Novo mesto

E-mails: rudolf.pusenjak@fini-unm.si

* Rudolf Pušenjak

Povzetek: V članku je obravnavana optimizacija stabilnih območij vibracij dvostopenjskega zobniškega gonila s parametričnim vzbujanjem kot posledice periodično spremenljive zobne togosti med ubiranjem. Da bi zagotovili mirnejši tek zobniškega gonila in zmanjšali hrup, želimo v procesu snovanja zobniškega gonila območja nestabilnosti vibracij čimbolj zmanjšati. Na zmanjšanje posameznega območja nestabilnosti v največji meri vplivata kontaktno razmerje posamezne zobniške dvojice in njun fazni premik. Na žalost se ob zmanjšanju enega nestabilnega območja lahko povečajo ostala nestabilna območja. S tem se pojavi potreba po iskanju optimalne rešitve, ki jo lahko zagotovimo z rešitvijo večkriterijskega optimizacijskega problema. V članku je predstavljena večkriterijska optimizacija območij stabilnosti vibracij zobniških gonil z metodo utežne vsote in z metodo ε – omejitev. Rezultate večkriterijske optimizacije območij stabilnosti vibracij v članku analitično pojasnimo. Obe večkriterijski optimizacijski metodi sta v članku prikazani pri dvostopenjskemu zobniškemu gonilu s tremi zobniki, pri katerem sta frekvenci ubiranja enaki.

Ključne besede: vibracije zobniških gonil, spremenljiva zobna togost, kontaktno razmerje, fazni premik, optimizacija območij parametrične nestabilnosti.

Abstract: The article deals with the optimization of stable vibration zones of a two-stage gearbox with parametric excitation as a consequence of periodically variable tooth stiffness during meshing. In order to ensure a calm running of the gearbox and to reduce noise, we want to minimize the vibration instability zone in the gearbox design process. The reduction of individual instability zone is largely influenced by the contact ratio of each gear pair and their phase shift. Unfortunately, as one unstable area decreases, other unstable areas can increase. This raises the need to find the optimal solution that can be provided by solving the multi-criteria optimization problem. The article presents the multi-criteria optimization of gear vibration stability zones by using the Weighted Sum Method and the ε -Constraint Method, respectively. The results of multicriteria optimization of stability zones in the article are analytically explained. Both multi-criteria optimization methods are presented in the article for a two-stage, three-gear gearbox with the same meshing frequencies.

Key words: vibrations of gear drives, variable mesh stiffness, contact ratio, phase shift, optimization of parametric instability domains.

1. Uvod

Zmanjševanje amplitud vibracij in hrupa zobniških gonil je eno izmed glavnih vodil v snovanju pogonskih sklopov z zahtevo po mirnejšem in tišjem teku. Osnovni vzrok vibracij in hrupa zobniških gonil predstavlja parametrično vzbujanje kot posledica spremenljive zobne togosti med ubiranjem. Zobna togost, povezana z elastičnim upogibom zob se periodično spreminja zaradi sprememb števila zob, ki so med ubiranjem v kontaktu. Parametrično vzbujanje zobniškega gonila povzroča resonančne pojave s povečevanjem vibracij in nestabilnost gonila [1], [5].

2. Matematični model vibracij dvostopenjskega zobniškega gonila

Dvostopenjsko zobniško gonilo lahko izvedemo v dveh konfiguracijah, prikazanih na sliki 1, ki vsebujeta tri oziroma štiri zobnike. V obeh konfiguracijah upoštevamo le relativne zasuke θ_1 , θ_2 in θ_3 , ki jih merimo glede na zasuke togega telesa na mestu vpetja. Togo telo je lahko pogonski motor, ki se vrti s konstantno vrtilno hitrostjo in je povezan z vhodno gredi zobniškega gonila. Torzijsko togost vhodne gredi označimo s k_{L0} . V dvostopenjskem zobniškem gonilu na sliki 1.b predpostavimo, da je vmesna gred, ki povezuje 2. zobnik s 4. zobnikom, toga. S tem se model najbolje približa realnim razmeram, ko se 2. in 4. zobnik v praksi pogosto neposredno dotikata ali sta izdelana v enem kosu. Ozobji zobnikov, ki se ubirata, modeliramo kot linearne vzmeti in njihove togosti označimo s k_{L1} za prvo, oziroma s k_{L2} za drugo stopnjo. Te togosti niso konstantne, temveč periodično nihajo okrog določene srednje vrednosti v odvisnosti od tega, kolikšno število zob je trenutno v kontaktu. V nadomestnem modelu so linearne vzmeti pripete na oba vznožna kroga zobnikov, katerih radije označimo z r_i , $i = 1,2,3,4$. S pomočjo momentov vztrajnosti mase I_i posameznih gredi s pripadajočimi zobniki tvorimo ekvivalentni masi prvih dveh gredi $m_i = I_i/r_i^2$ ($i = 1,2$) ter ekvivalentno maso tretje gredi s pripadajočim zobnikom $m_3 = vI_3/r_3^2$, kjer je $v = 1$ pri zobniškem gonilu s tremi in $v = r_4/r_2$ pri zobniškem gonilu s štirimi zobniki. Ekvivalentne togosti izrazimo kot $k_0 = k_{L0}/r_1^2$, $k_1 = k_{L1}$ in $k_2 = v^2 k_{L2}$. Ekvivalentni zobni togosti k_i , $i=1,2$ izrazimo v obliki vsote $k_i(t) = k_{gi} + k_{vi}(t)$, kjer sta k_{gi} srednji vrednosti zobne togosti, $k_{vi}(t)$ pa pripadajoči variabilni komponenti. Njun časovni potek prikazuje slika 2. V nadomestnem modelu vpeljemo namesto zasukov deformacije, ki jih računamo na radijih vznožnih krogov s pomočjo transformacij $x_1 = \theta_1 r_1$, $x_2 = \theta_2 r_2$ in $x_3 = \theta_3 r_3/v$. Z združitvijo deformacij v vektor $\mathbf{q} = [x_1, x_2, x_3]^T$, uvedbo vztrajnostne masne matrike $\mathbf{M} = \text{diag}(m_1, m_2, m_3)$ in uvedbo togostne matrike $\mathbf{K}(t) = \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_v(t)$ kot vsote iz konstantnega dela oziroma matrike srednjih vrednosti togosti \mathbf{K}_0 ter variabilnega dela $\mathbf{K}_v(t)$, lahko zapišemo diferencialno enačbo prostega nihanja zobniškega gonila:

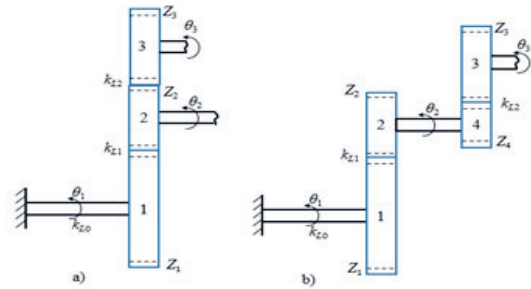
$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + [\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_v(t)]\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (1)$$

kjer je \mathbf{K}_0 matrika srednjih vrednosti togosti:

$$\mathbf{K}_0 = \begin{bmatrix} k_0 + k_{g1} & k_{g1} & 0 \\ k_{g1} & k_{g1} + k_{g2} & k_{g2} \\ 0 & k_{g2} & k_{g2} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$\mathbf{K}_v(t)$ pa matrika variabilnega dela zobne togosti:

$$\mathbf{K}_v(t) = \begin{bmatrix} k_{v1}(t) & k_{v1}(t) & 0 \\ k_{v1}(t) & k_{v1}(t) + k_{v2}(t) & k_{v2}(t) \\ 0 & k_{v2}(t) & k_{v2}(t) \end{bmatrix} \quad (3)$$



Slika 1. Konfiguraciji dvostopenjskega zobniškega gonila. a) gonilo s tremi zobniki, b) gonilo s štirimi zobniki.

Variabilne komponente zobne togosti $k_{vi}(t)$ so v odvisnosti od časa periodične s frekvenco ubiranja Ω_i . Potek zobne togosti lahko dobimo eksperimentalno, vendar bomo v tej raziskavi privzeli pravokotno nihajno obliko kot jo prikazuje slika 2. Pravokotno nihajno obliko variabilne komponente $k_{vi}(t)$ izrazimo s pomočjo okrnjene Fourierove vrste z N členi:

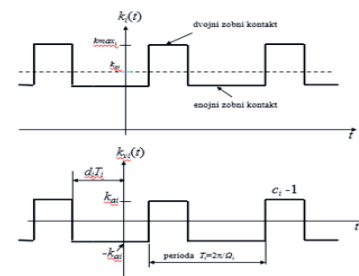
$$k_{vi}(t) = 2k_{ai} \sum_{s=1}^N \left(a_i^s \cos s\Omega_i t + b_i^s \sin s\Omega_i t \right) \quad (4)$$

V praksi zadostuje, če v Fourierovi vrsti obdržimo le prve tri ali štiri člene. S pomočjo slike 2 lahko izrazimo Fourierove koeficiente a_i^s in b_i^s :

$$a_i^s = -\frac{2}{s\pi} \cos[\pi(c_i - 2d_i)] \sin(\pi s c_i), \quad (5)$$

$$b_i^s = -\frac{2}{s\pi} \sin[\pi(c_i - 2d_i)] \sin(\pi s c_i),$$

kjer c_i pomenijo kontaktna razmerja, produkti $d_i T_i$ so fazni premiki, d_i označujejo fazne koeficiente, $T_i = 2\pi/\Omega_i$ pa so periode variabilnih komponent zobne togosti.



Slika 2. Periodična zobna togost $k_i(t) = k_{gi} + k_{vi}(t)$. Simbol c_i pomeni kontaktno razmerje, k_{gi} so srednje vrednosti zobne togosti, $d_i T_i$ pa so fazni koti.

V enačbi (1) lahko masno matriko \mathbf{M} odpravimo z rešitvijo časovno invariantnega primera, ki ga opisuje pridružen problem lastnih vrednosti in lastnih vektorjev

$$\mathbf{K}_0 \Phi = \mathbf{M} \Phi \Lambda \tag{6}$$

kjer je $\Lambda = \text{diag}(\omega_1^2, \omega_2^2, \omega_3^2)$ diagonalna matrika lastnih vrednosti, $\omega_i, i = 1, 2, 3$ so lastne (naravne) frekvence, $\Phi = [\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3]$ pa je matrika lastnih vektorjev, ki ustrezajo naravnim načinom nihanja $\Phi_i, i = 1, 2, 3$. Naravne načine nihanja normiramo z izpolnitvijo zahteve $\Phi^T \mathbf{M} \Phi = \mathbf{I}$. Če uporabimo modalno transformacijo vektorja deformacij $\mathbf{q} = \Phi \mathbf{u}$, dobimo z normalizacijo lastnih vektorjev $\Phi^T \mathbf{M} \Phi = \mathbf{I}$ matrično diferencialno enačbo

$$\ddot{\mathbf{u}} + \Lambda \mathbf{u} + \Phi^T \mathbf{K}_v(t) \Phi \mathbf{u} = \mathbf{0} \tag{7}$$

Matrični produkt variabilnega dela zobne togosti $\Phi^T \mathbf{K}_v(t)$ (Φ je ugodno razstaviti na dva dela tako, da posamezni del ustreza i -ti stopnji zobniškega gonila, $i = 1, 2$:

$$\Phi^T \mathbf{K}_v(t) \Phi = \Phi^T \sum_{i=1}^2 \mathbf{K}_{vi}(t) \Phi = \sum_{i=1}^2 k_{vi}(t) \Phi^T \mathbf{C}_i \Phi, \quad i = 1, 2. \tag{8}$$

kjer sta \mathbf{C}_1 in \mathbf{C}_2 povezovalni matriki, ki sta določeni na naslednji način:

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{9}$$

Z vstavljanjem enačbe (4) v enačbo (8), nato pa z vstavljanjem dobljenega izraza v enačbo (7) dobimo:

$$\ddot{\mathbf{u}} + \left(\Lambda + \sum_{i=1}^2 k_{vi}(t) \Phi^T \mathbf{C}_i \Phi \right) \mathbf{u} = \ddot{\mathbf{u}} + [\Lambda + 2 \sum_{i=1}^2 k_{ai} \sum_{s=1}^N (a_i^s \cos s \Omega_i t + b_i^s \sin s \Omega_i t) \Phi^T \mathbf{C}_i \Phi] \mathbf{u} = \mathbf{0} \tag{10}$$

Za reševanje matrične diferencialne enačbe bomo v nadaljevanju uporabili perturbacijsko metodo z več časovnimi skalami. Ker so amplitude variabilne zobne togosti k_{ai} v praksi majhne nasproti srednjim vrednostim zobne togosti k_{gi} , lahko v splošnem vpeljemo dva majhna, pozitivna perturbacijska parametra $\varepsilon_i = k_{ai}/k_{gi}, i = 1, 2$ in enačbo (10) prepisemo na obliko:

$$\ddot{\mathbf{u}} + [\Lambda + 2 \sum_{i=1}^2 \varepsilon_i \sum_{s=1}^N (a_i^s \cos s \Omega_i t + b_i^s \sin s \Omega_i t) k_{gi} \Phi^T \mathbf{C}_i \Phi] \mathbf{u} = \mathbf{0}. \tag{11}$$

Dobljena enačba je matrična Hillova diferencialna enačba parametrično vzbujenih vibracij (dvostopenjskega) zobniškega gonila [4]. Pomembna lastnost matrik $\Phi^T \mathbf{C}_i \Phi, i = 1, 2$ je, da sta simetrični.

3. Reševanje matrične diferencialne enačbe parametrično vzbujenih vibracij

Reševanje enačbe (11) s perturbacijsko metodo z več časovnimi skalami bomo zaradi prostorskih omejitev v nadaljevanju prikazali za primer $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$, pri katerem sta širina zob in material zobnikov enaka in sta tudi amplitudi variabilne zobne togosti obeh zobnikov med ubiranjem enaki. Razlikujeta pa se lahko kontaktni razmerji in fazna kota obeh ozobj. Pri reševanju primera $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$ so lahko vsi parametri dveh ozobj v posamezni stopnji zobniškega gonila različni. Perturbacijsko metodo uporabimo tako, da poleg običajne časovne skale t vpeljemo še počasno časovno skalo $\tau = \varepsilon t$, običajni drugi časovni odvod $(\cdot) = \frac{d}{dt}$ zamenjamo

diferencialnim operatorjem $\frac{d^2}{dt^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t \partial \tau} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}$ enačbo (11) pa pretvorimo v Hillovo parcialno diferencialno enačbo. V perturbacijski metodi je ugodneje, če uporabimo komponentno obliko enačbe:

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2 u_n}{\partial t \partial \tau} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_n}{\partial \tau^2} + \omega_n^2 u_n + 2\varepsilon \sum_{r=1}^3 \left[\sum_{i=1}^2 \sum_{s=1}^N (a_i^s \cos s \Omega_i t + b_i^s \sin s \Omega_i t) k_{gi} (\Phi^T \mathbf{C}_i \Phi)_{nr} \right] u_r = 0, \quad n = 1, 2, 3 \tag{12}$$

Izraz $(\Phi^T \mathbf{C}_i \Phi)_{nr}$ v enačbi (12) pomeni n, r -ti element matrike $\Phi^T \mathbf{C}_i \Phi$ (to je element na presečišču n -te vrstice in r -tega stolpca matrike). Če vpeljemo naslednje elemente:

$$D_{nr}^s = a_1^s k_{g1} (\Phi^T \mathbf{C}_1 \Phi)_{nr}, \quad E_{nr}^s = b_1^s k_{g1} (\Phi^T \mathbf{C}_1 \Phi)_{nr}, \tag{13}$$

$$F_{nr}^s = a_2^s k_{g2} (\Phi^T \mathbf{C}_2 \Phi)_{nr}, \quad G_{nr}^s = b_2^s k_{g2} (\Phi^T \mathbf{C}_2 \Phi)_{nr},$$

lahko enačbo (12) zapišemo v obliki:

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2 u_n}{\partial t \partial \tau} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_n}{\partial \tau^2} + \omega_n^2 u_n + 2\varepsilon \sum_{r=1}^3 \left[\sum_{s=1}^N (D_{nr}^s \cos s \Omega_1 t + E_{nr}^s \sin s \Omega_1 t + F_{nr}^s \cos s \Omega_2 t + G_{nr}^s \sin s \Omega_2 t) \right] u_r = 0, \quad n = 1, 2, 3 \tag{14}$$

Rešitev enačbe (14) iščemo v obliki potenčne vrste:

$$u_n = u_{n0}(t, \tau) + \varepsilon u_{n1}(t, \tau) + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_{nk}(t, \tau), \quad n = 1, 2, 3 \tag{15}$$

Z uvrstitvijo nastavka (15) v enačbo (14) ter zbiranjem členov ob istih potencah parametra ε dobimo zaporedje enačb:

$$\frac{\partial^2 u_{n0}}{\partial t^2} + \omega_n^2 u_{n0} = 0, \tag{16.a}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_{n1}}{\partial t^2} + \omega_n^2 u_{n1} = & -2 \frac{\partial^2 u_{n0}}{\partial t \partial \tau} - 2 \sum_{r=1}^3 \left[\sum_{s=1}^N \left(D_{nr}^s \cos s \Omega_1 t \right. \right. \\ & \left. \left. + E_{nr}^s \sin s \Omega_1 t + F_{nr}^s \cos s \Omega_2 t + G_{nr}^s \sin s \Omega_2 t \right) \right] u_{r0} \end{aligned} \quad (16.b)$$

Splošna rešitev enačbe (16.a) je:

$$u_{n0} = A_n(\tau) e^{i\omega_n t} + \bar{A}_n(\tau) e^{-i\omega_n t}, \quad n = 1, 2, 3 \quad (17)$$

Uvrstitev rešitve (17) v enačbo (16.b) nam da:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_{n1}}{\partial t^2} + \omega_n^2 u_{n1} = & -2i\omega_n \frac{dA_n(\tau)}{d\tau} e^{i\omega_n t} - \\ & \sum_{r=1}^3 \sum_{s=1}^N A_r(\tau) \left[D_{nr}^s \left[e^{i(s\Omega_1 + \omega_r)t} + e^{-i(s\Omega_1 - \omega_r)t} \right] - \right. \\ & \left. iE_{nr}^s \left[e^{i(s\Omega_1 + \omega_r)t} - e^{-i(s\Omega_1 - \omega_r)t} \right] + F_{nr}^s \left[e^{i(s\Omega_2 + \omega_r)t} + e^{-i(s\Omega_2 - \omega_r)t} \right] \right. \\ & \left. - iG_{nr}^s \left[e^{i(s\Omega_2 + \omega_r)t} - e^{-i(s\Omega_2 - \omega_r)t} \right] \right] + 2i\omega_n \frac{d\bar{A}_n(\tau)}{d\tau} e^{-i\omega_n t} \\ & - \sum_{r=1}^3 \sum_{s=1}^N \bar{A}_r(\tau) \left[D_{nr}^s \left[e^{i(s\Omega_1 - \omega_r)t} + e^{-i(s\Omega_1 + \omega_r)t} \right] \right. \\ & \left. + iE_{nr}^s \left[e^{-i(s\Omega_1 + \omega_r)t} - e^{i(s\Omega_1 - \omega_r)t} \right] + F_{nr}^s \left[e^{i(s\Omega_2 - \omega_r)t} + e^{-i(s\Omega_2 + \omega_r)t} \right] \right. \\ & \left. + iG_{nr}^s \left[e^{-i(s\Omega_2 + \omega_r)t} - e^{i(s\Omega_2 - \omega_r)t} \right] \right] \end{aligned} \quad (18)$$

Enačbo (18) lahko ob navedenih pogojih $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ uporabljamo pri dvostopenjskih zobniških gonilih s tremi ali s štirimi zobniki. V gonilih s štirimi zobniki sta frekvenci ubiranja Ω_1 in Ω_2 različni in medsebojno povezani z relacijo $\Omega_1 = R\Omega_2$, kjer je R razmerje števila zob 2. in 4. zobnika, $R = Z_2/Z_4$ (glej sliko 1.b). Iz slike 1.a pa je razvidno, da je pri gonilih s tremi zobniki $R = 1$ in sta zato frekvenci ubiranja enaki, $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$. V nadaljevanju bomo zaradi prostorske omejitve podrobno obravnavali samo ta primer, vse ostale primere pa lahko obravnavamo na podoben način.

3.1 Dvostopenjsko gonilo s tremi zobniki in enakimi variacijami zobne togosti

Uporaba dveh časovnih skal v perturbacijski metodi nam omogoča, da raziščemo splošni primer ko se $s\Omega$ le malo razlikuje od kombinacijske frekvence $\omega_p + \omega_q$. V ta namen postavimo $s\Omega = \omega_p + \omega_q + \varepsilon\sigma$, kjer je σ parameter razglasitve, ki ga je potrebno določiti. Ko vstavimo to zamenjavo v desno stran enačbe (18) z $\Omega = \Omega_1 = \Omega_2$, nastanejo sekularni členi, ki jih je potrebno eliminirati, da zagotovimo enolično rešitev, Eliminacijo sekularnih členov zagotovimo s pogoji rešljivosti:

$$\begin{aligned} 2i\omega_p \frac{dA_p(\tau)}{d\tau} + \\ \bar{A}_q(\tau) \left[(D_{pq}^s + F_{pq}^s) - i(E_{pq}^s + G_{pq}^s) \right] e^{i\sigma\tau} = 0, \\ 2i\omega_q \frac{dA_q(\tau)}{d\tau} + \\ \bar{A}_p(\tau) \left[(D_{qp}^s + F_{qp}^s) - i(E_{qp}^s + G_{qp}^s) \right] e^{i\sigma\tau} = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

Enačbi (19) imata trivialni rešitvi $A_p(\tau) \equiv 0$, $A_q(\tau) \equiv 0$. Netrivialni rešitvi iščemo z nastavkoma:

$$A_p(\tau) = a_p e^{-i\lambda\tau}, \quad A_q(\tau) = a_q e^{i(\bar{\lambda} + \sigma)\tau}, \quad (20)$$

kjer sta a_p , a_q kompleksni konstanti, λ pa sta korena pridružene karakteristične enačbe:

$$\begin{aligned} \lambda^2 + \sigma\lambda + \frac{1}{4} \Gamma_{pq}^s = 0, \quad \lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(-\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - \Gamma_{pq}^s} \right), \quad (21) \\ \Gamma_{pq}^s = \frac{1}{\omega_p \omega_q} \left[(D_{pq}^s + F_{pq}^s)^2 + (E_{pq}^s + G_{pq}^s)^2 \right]. \end{aligned}$$

Kadar je v enačbi (21) $\sigma^2 > \Gamma_{pq}^s$ sta korena karakteristične enačbe realna in negativna, A_p in A_q pa omejena.

Nasprotno sta A_p in A_q neomejena, kadar je $\sigma^2 < \Gamma_{pq}^s$.

Meji stabilnosti sta tako pri izpolnjenem

pogojem $\sigma = \pm \sqrt{\Gamma_{pq}^s}$, kar lahko zapišemo v eksplicitni obliki:

$$\Omega = \frac{1}{s} \left(\omega_p + \omega_q \pm \varepsilon \sqrt{\Gamma_{pq}^s} \right) \quad (22)$$

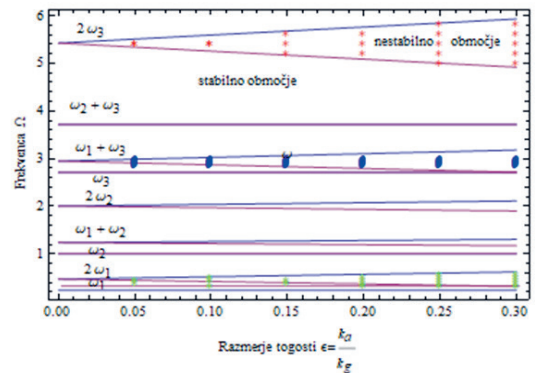
Če je $p = q$, imamo primer nestabilnosti vibracij v enojnem načinu nihanja, pri katerem preide enačba (22) na obliko:

$$\begin{aligned} \Omega = \frac{1}{s} \left(2\omega_p \pm \varepsilon \sqrt{\Gamma_{pp}^s} \right) \\ = \frac{1}{s} \left[2\omega_p \pm \frac{\varepsilon}{\omega_p} \sqrt{(D_{pp}^s + F_{pp}^s)^2 + (E_{pp}^s + G_{pp}^s)^2} \right]. \end{aligned} \quad (23)$$

Enačba mej stabilnosti (23) omejuje območje primarne nestabilnosti v primeru, ko je $s = 1$, območje sekundarne nestabilnosti pa tedaj, ko je $s = 2$. Če v enačbi (22) $p \neq q$, vendar je pri tem $s = 1$, govorimo o kombinacijski nestabilnosti.

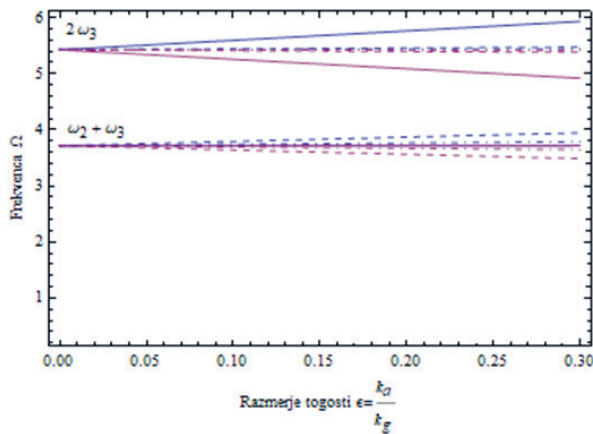
Z uporabo enačb (22) in (23) izračunamo meje stabilnosti zobniškega gonila s tremi zobniki, ki jih prikazuje diagram na sliki 3. Diagram je izračunan pri naslednjih podatkih: $m_1 = 1$; $m_2 = 0.3$; $m_3 = 4.0$; $k_0 = 0.5$; $k_{g1} = k_{g2} = 1$; $c_1 = c_2 = 1.5$; $d_1 = d_2 = 0$. Analitične rešitve so za meje primarnih nestabilnosti $2\omega_1$ in $2\omega_3$ ter kombinacijske nestabilnosti $\omega_1 + \omega_3$ preverjene s pomočjo numerične integracije enačbe (11) in Floquetove teorije [3], pri čemer se rezultati po obeh metodah zelo dobro ujemajo na celotnem področju razmerja togosti $\varepsilon = k_a/k_g$.

Slika 3. Meje stabilnosti dvostopenjskega zobniškega gonila s tremi zobniki – analitična rešitev s perturbacijsko metodo, *, o numerična rešitev.



Iz slike 3 je razvidno, da je primarno nestabilno območje z ubirno frekvenco Ω v okolici dvakratne naravne frekvence ω_3 , $\Omega \approx 2\omega_3$ bistveno večje kot sta primarni nestabilni območji $\Omega \approx 2\omega_2$ in $\Omega \approx 2\omega_1$, medtem ko je območje kombinacijske nestabilnosti $\Omega \approx \omega_2 + \omega_3$ zanemarljivo majhno. Iz enačb (5), (11), (13), (21) in (22) nedvomno izhaja, da imata na velikost nestabilnih območij ključen vpliv kontaktno razmerje c_i in fazni koeficient d_i , $i = 1, 2$.

Slika 4 prikazuje vpliv kontaktnega razmerja in faznega koeficienta na velikost območja primarne nestabilnosti $\Omega \approx 2\omega_3$ in kombinacijske nestabilnosti $\Omega \approx \omega_2 + \omega_3$. Najpomembnejša ugotovitev, ki iz te slike izhaja, je, da ima zmanjšanje primarnega nestabilnega območja $\Omega \approx 2\omega_3$ za posledico povečanje območja kombinacijske nestabilnosti $\Omega \approx \omega_2 + \omega_3$.



Slika 4. Vpliv kontaktnih razmerij c_1 in c_2 ter faznih koeficientov d_1 in d_2 na velikost nestabilnih območij

- $c_1 = c_2 = \frac{3}{2}, d_1 = d_2 = 0$,
- $c_1 = c_2 = \frac{3}{2}, d_1 = 0, d_2 = \frac{1}{2}$,
- . . . - $c_1 = 1.1, c_2 = 1.9, d_1 = 0, d_2 = 0.9$.

4 Optimalno določanje stabilnih območij

4.1 Minimizacija posameznega nestabilnega območja

V slikah 3 in 4 moramo upoštevati, da je razmerje togosti $\varepsilon = k_a/k_g$ v skladu s predpostavko o majhni pozitivni vrednosti perturbacijskega parametra omejeno z določeno vrednostjo parametra ε_{\max} , npr. $\varepsilon_{\max} = 0.3$. Glede na to je vsako posamezno območje nestabilnosti geometrično gledano trikotnik z ogliščem v točki $(\varepsilon = 0, \Omega = \frac{1}{s}(\omega_p + \omega_q))$, mejnima premicama s smernima koeficientoma $\pm \frac{\varepsilon}{s} \sqrt{\Gamma_{pq}^s}$ in stranico v smeri vertikale pri ε_{\max} .

Zmanjševanje ploščine trikotnika dosežemo, če zmanjšujemo smerni koeficient mejnih premic. Ker je pri posameznem območju nestabilnosti parameter s določen in tudi parameter ε v postopku konstruiranja fiksno izbiramo, lahko v problemu optimizacije oba parametra vzamemo za konstantna. S tem se izkaže, da

je za namensko funkcijo najboljše vzeti kar koeficient

$$\Gamma_{pq}^s$$

Če dosežemo, da postane smerni koeficient enak nič, s tem pa enak nič tudi koeficient:

$$\Gamma_{pq}^s = \frac{1}{\omega_p \omega_q} \left[\left(D_{pq}^s + F_{pq}^s \right)^2 + \left(E_{pq}^s + G_{pq}^s \right)^2 \right] \tag{24}$$

posamezno nestabilno področje izgine.

V primeru enojnega načina nihanja, to je v primeru $p=q$, bo nestabilno območje izginilo, če dosežemo, da velja

$$\Gamma_{pp}^s = \frac{1}{\omega_p^2} \left[\left(D_{pp}^s + F_{pp}^s \right)^2 + \left(E_{pp}^s + G_{pp}^s \right)^2 \right] = 0$$

Elemente

$$\begin{aligned} D_{pq}^s &= a_1^s k_{g1} \left(\Phi^T C_1 \Phi \right)_{pq}, & E_{pq}^s &= b_1^s k_{g1} \left(\Phi^T C_1 \Phi \right)_{pq}, \\ F_{pq}^s &= a_2^s k_{g2} \left(\Phi^T C_2 \Phi \right)_{pq}, & G_{pq}^s &= b_2^s k_{g2} \left(\Phi^T C_2 \Phi \right)_{pq}, \end{aligned} \tag{25}$$

$(p, q = 1, 2, 3)$

lahko s tvorbo matričnih produktov $\Phi^T C_i \Phi$, $i = 1, 2$ izrazimo v eksplicitni obliki. Najprej zapišemo matriko lastnih vektorjev s pomočjo elementov:

$$\Phi = [\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3] = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & \Phi_{13} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} & \Phi_{23} \\ \Phi_{31} & \Phi_{32} & \Phi_{33} \end{bmatrix} \tag{26}$$

s čimer dobimo matrični produkt $\Phi^T C_i \Phi$, $i = 1, 2$ v obliki:

$$\begin{aligned} \left(\Phi^T C_i \Phi \right)_{pq} &= (\Phi_{ip} + \Phi_{i+1,p}) (\Phi_{iq} + \Phi_{i+1,q}) \\ &= \delta_{ip} \delta_{iq}, (p, q = 1, 2, 3; i = 1, 2) \end{aligned} \tag{27}$$

V elementu $(\Phi^T C_1 \Phi)_{pq}$ matričnega produkta je z $\delta_{1p} = \Phi_{1p} + \Phi_{2p}$ označen relativni odklon zob prvega ozobja pri p -tem modalnem načinu nihanja, z $\delta_{2p} = \Phi_{2p} + \Phi_{3p}$ pa relativni odklon zob drugega ozobja pri p -tem modalnem načinu nihanja.

Elemente D_{pq}^s , E_{pq}^s , F_{pq}^s in G_{pq}^s lahko sedaj s pomočjo formul (25), (27) in Fourierjevih koeficientov (5) izrazimo v obliki:

$$\begin{aligned}
 D_{pq}^s &= -\frac{2}{s\pi} \cos[s\pi(c_1 - 2d_1)] \sin(s\pi c_1) k_{g1} \delta_{1p} \delta_{1q}, \\
 E_{pq}^s &= -\frac{2}{s\pi} \sin[s\pi(c_1 - 2d_1)] \sin(s\pi c_1) k_{g1} \delta_{1p} \delta_{1q}, \\
 F_{pq}^s &= -\frac{2}{s\pi} \cos[s\pi(c_2 - 2d_2)] \sin(s\pi c_2) k_{g2} \delta_{2p} \delta_{2q}, \\
 G_{pq}^s &= -\frac{2}{s\pi} \sin[s\pi(c_2 - 2d_2)] \sin(s\pi c_2) k_{g2} \delta_{2p} \delta_{2q},
 \end{aligned} \tag{28}$$

za primer, ko $p \neq q$

Oglejmo si sedaj, v katerem primeru lahko dosežemo ničelno vrednost koeficienta

$$\Gamma_{pq}^s = \frac{1}{\omega_p \omega_q} \left[(D_{pq}^s + F_{pq}^s)^2 + (E_{pq}^s + G_{pq}^s)^2 \right]$$

za $p \neq q$ in s tem celo odpravo nestabilnega področja.

V ta namen enačbo (24) zapišemo v eksplicitni obliki:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{pq}^s &= \frac{1}{\omega_p \omega_q} \left[(D_{pq}^s + F_{pq}^s)^2 + (E_{pq}^s + G_{pq}^s)^2 \right] \\
 &= \frac{4}{s^2 \pi^2 \omega_p \omega_q} \left[\sin^2(s\pi c_1) k_{g1}^2 \delta_{1p}^2 \delta_{1q}^2 \right. \\
 &\quad \left. + 2 \cos[s\pi(c_1 - c_2 - 2(d_1 - d_2))] \sin(s\pi c_1) \sin(s\pi c_2) \times \right. \\
 &\quad \left. k_{g1} k_{g2} \delta_{1p} \delta_{1q} \delta_{2p} \delta_{2q} + \sin^2(s\pi c_2) k_{g2}^2 \delta_{2p}^2 \delta_{2q}^2 \right]
 \end{aligned} \tag{29}$$

Podroben pregled enačbe (29) pokaže, da lahko koeficient postane enak nič v dveh primerih, ki sta pomembna tudi za večkriterijsko optimizacijo, v kateri želimo zmanjšati ploščino vseh nestabilnih območij naenkrat in ki si jo bomo ogledali kasneje.

a) **Prvi primer.** $\Gamma_{pq}^s = 0$, ko je $\sin(s\pi c_1) = \sin(s\pi c_2) = 0$, oziroma ko sta c_1, c_2 celi števili, ki sta enaki 1 ali 2. Ta primer nastopi, ko imamo enojni ali dvojni kontakt parov zob med ubiranjem zobnikov vzdolž celotne kontaktne premice. Hkrati je to edini primer, ko ima koeficient Γ_{pq}^s vrednost nič pri vseh vrstah nestabilnosti, ali povedano drugače, vsa nestabilna območja pri vrednostih c_1 in c_2 enakim 1 ali 2, izginejo.

b) **Drugi primer.** Γ_{pq}^s je enak nič, $\Gamma_{pq}^s = 0$ tudi v primeru, ko c_1, c_2 nista celi števili, vendar pa sta med seboj enaki tako da velja $c_1 = c_2 = \frac{s+1}{s}$, $s \geq 2$. Ta primer nastopi pri nestabilnostih višjega reda, na primer pri sekundarni nestabilnosti, $s=2$, terciarni nestabilnosti, $s=3$, itd. Pri sekundarni nestabilnosti, $s=2$, je $\Gamma_{pq}^s = 0$, ko imata c_1 in c_2 vrednost $c_1 = c_2 = \frac{3}{2}$. Obenem pa lahko pri primarni ali kombinacijski nestabilnosti, pri katerih je $s=1$, koeficient Γ_{pq}^s zavzame maksimalno vrednost, če je le znak produkta $\delta_{1p} \delta_{1q} \delta_{2p} \delta_{2q}$ pozitiven. (Znak produkta $\delta_{1p} \delta_{1q} \delta_{2p} \delta_{2q}$ je npr. pozitiven pri podatkih za območja nestabilnosti na sliki 3).

S tem se je povsem teoretično izkazalo, da popolna odprava (eliminacija) nestabilnega območja določenega tipa lahko povzroči maksimalno povečanje nestabilnih območij drugih tipov.

4.2 Večkriterijska minimizacija nestabilnih območij

Istočasno minimizacijo vseh nestabilnih območij lahko izvedemo, če uporabimo metode večkriterijske optimizacije [2]. Med mnogimi evlucijskimi algoritmi večkriterijske optimizacije sta najenostavnejša metoda utežne vsote (Weighted Sum Method) in metoda z ε -omejitvami (ε -Constraint Method). Pri tem je potrebno opozoriti, da ε -omejitev ne smemo zamenjevati s perturbacijskim parametrom $\varepsilon = k_d/k_g$.

Na vsakem posameznem območju nestabilnosti poznamo namensko funkcijo Γ_{pq}^s ki jo skušamo čim bolj zmanjšati tako, da iščemo optimalne vrednosti kontaktnih razmerij c_i in faznih koeficientov d_i , $i = 1, 2$. Pri tem lahko vselej brez škode vzamemo $d_1 = 0$, tako da se nabor prostih parametrov skrči na konstrukcijske spremenljivke c_1, c_2 in d_2 . Vzemimo, da imamo množico nestabilnih območij z M elementi, kjer z indeksom $m = 1, 2, \dots, M$ označimo posamezna območja nestabilnosti. Da moremo namenske funkcije Γ_{pq}^s med seboj razlikovati, v ta namen vpeljemo novo oznako $\Gamma_m \left[\binom{s}{pq}, c_1, c_2, d_2 \right]$

V splošnem namenske funkcije sestavimo v vektor namenskih funkcij $\Gamma = [\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_m]^T$.

Namenske funkcije $\Gamma_m \left[\binom{s}{pq}, c_1, c_2, d_2 \right]$ niso linearne, niti konveksne, ampak so transcendentalne, zaradi česar se moramo zateči k bolj splošnim metodam nelinearne optimizacije.

4.2.1 Metoda utežne vsote

V metodi utežne vsote celotno množico namenskih funkcij skaliramo v eno samo skupno namensko funkcijo $\Gamma(c_1, c_2, d_2)$ tako, da seštejemo posamezne namenske funkcije $\Gamma_m \left[\binom{s}{pq}, c_1, c_2, d_2 \right]$, pomnožene z utežmi w_m .

Skalarizirana namenska funkcija je tedaj:

$$\Gamma(c_1, c_2, d_2) = \sum_{m=1}^M w_m \Gamma_m \left[\binom{s}{pq}, c_1, c_2, d_2 \right] \quad (30)$$

V literaturi lahko najdemo številne predloge za izbiro uteži, med njimi predlog $\sum_{m=1}^M w_m = 1$, ki pa ni obvezen.

Uteži w_m zato navadno izbiramo v skladu s preferencami, oziroma prioriteta posameznih namenskih funkcij. Če nobeni namenski funkciji ne pripišemo posebne vloge, izberemo uteži, ki so enake $w_m = 1, m = 1, 2, \dots, M$, kar smo uporabili v zgledu, prikazanem v nadaljevanju. Večkriterijski optimizacijski problem za istočasno minimizacijo nestabilnih območij z metodo utežne vsote formuliramo v obliki:

$$\begin{aligned} & \text{minimiziraj } \Gamma(c_1, c_2, d_2) \\ & = \sum_{m=1}^M w_m \Gamma_m \left[\binom{s}{pq}, c_1, c_2, d_2 \right], \\ & \text{z omejitvami } \begin{cases} d_1 = 0, \\ f(d_2) = 0, \\ g_i(c_i) = 0, i = 1, 2 \\ 0 \leq d_2 \leq 1, \\ 1 \leq c_i \leq 2, i = 1, 2 \end{cases} \end{aligned} \quad (31)$$

kjer so $d_1 = 0, f(d_2) = 0$ in $g_i(c_i) = 0, i = 1, 2$ omejitvene enačbe, ki jih morajo izpolnjevati konstrukcijske spremenljivke c_1, c_2, d_1 in d_2 , omejitvene neenačbe $1 \leq c_i \leq 2, i = 1, 2$ in $0 \leq d_2 \leq 1$ pa določajo intervale dopustnih vrednosti konstrukcijskih spremenljivk. Ker namenske funkcije $\Gamma_m \left[\binom{s}{pq}, c_1, c_2, d_2 \right]$ niso konveksne, tudi skalarizirana skupna namenska funkcija $\Gamma(c_1, c_2, d_2)$ ni konveksna.

Metoda utežne vsote je enostavna, vendar je njena uporabnost zaradi nekonveksne skalarizirane namenske funkcije omejena, ker obstaja možnost, da nekatere optimalne rešitve v Paretovem smislu v nekonveksnem ciljnem prostoru ne bodo izračunane.

4.2.2 Metoda ε – omejitev

Za razliko od metode utežne vsote, lahko metodo ε - omejitev uporabljamo tako v konveksnih kot tudi v nekonveksnih problemih. V metodi ε - omejitev za namensko funkcijo izberemo eno izmed funkcij $m = 1, 2, \dots, M$, npr. funkcijo vse ostale funkcije $m = 1, 2, \dots, M, m \neq \mu$ pa omejimo z omejitvami ε_m , ki jih sami predpišemo.

V metodi ε - omejitev za namensko funkcijo izberemo eno izmed funkcij $\Gamma_m \left[\binom{s}{pq}, c_1, c_2, d_2 \right], m = 1, 2, \dots, M$, npr. funkcijo $\Gamma_\mu \left[\binom{s}{pq}, c_1, c_2, d_2 \right]$, vse ostale funkcije $\Gamma_m \left[\binom{s}{pq}, c_1, c_2, d_2 \right], m = 1, 2, \dots, M, m \neq \mu$ pa omejimo z omejitvami ε_m , ki jih sami predpišemo.

Predpisovanje ε – omejitev predstavlja težji del optimizacijskega problema, ker ne obstaja nobeno

enotno objektivno merilo, s katerim bi omejitvene vrednosti ε_m lahko določili. V primeru večkriterijske minimizacije nestabilnih območij vibracij zobniških gonil lahko ta problem zadovoljivo rešimo na tak način, da na posameznih nestabilnih območjih izvedemo lokalno optimizacijo in v njej določimo minimalno, oziroma maksimalno vrednost $\Gamma_m \left[\binom{s}{pq}, c_1, c_2, d_2 \right], m \neq \mu$.

Vrednost ε_m nato izračunamo po pravilu:

$$\varepsilon_m = \frac{1}{2} h \left[\min \left(\Gamma_m \left[\binom{s}{pq}, c_1, c_2, d_2 \right] \right) + \max \left(\Gamma_m \left[\binom{s}{pq}, c_1, c_2, d_2 \right] \right) \right], m \neq \mu \quad (32)$$

kjer je h nek prost parameter, ki si ga izberemo. Večkriterijski optimizacijski problem, v katerem nastopajo enake omejitvene funkcije in enaki intervali dopustnih vrednosti konstrukcijskih spremenljivk kot v metodi utežne vsote, z metodo ε - omejitev zapišemo v naslednji formalni obliki:

$$\begin{aligned} & \text{minimiziraj } \Gamma_\mu \left[\binom{s}{pq}, c_1, c_2, d_2 \right] \\ & \left\{ \begin{array}{l} \Gamma_m \left[\binom{s}{pq}, c_1, c_2, d_2 \right] \leq \varepsilon_m, \\ m = 1, 2, \dots, M \text{ in kjer } m \neq \mu \\ d_1 = 0, \\ f(d_2) = 0, \\ g_i(c_i) = 0, i = 1, 2 \\ 0 \leq d_2 \leq 1, \\ 1 \leq c_i \leq 2, i = 1, 2 \end{array} \right. \end{aligned} \quad (33)$$

4.2.3 Primerjava rezultatov

Kot zgled večkriterijske optimizacije nestabilnih območij z metodo utežne vsote in z metodo ε – omejitev si oglejmo minimizacijo nestabilnih območij $\Omega \approx 2\omega_3$ in $\Omega \approx \omega_2 + \omega_3$, ki sta prikazani na sliki 4. Primerjavo rezultatov v obeh metodah prikazujeta Tabela 1 in 2. V obeh tabelah primerjamo rezultate minimizacije območij nestabilnosti v treh primerih, v katerih je vrednost faznega koeficienta d_1 vselej enaka nič. V prvem primeru so preostali parametri c_1, c_2 in d_2 omejeni z intervali dopustnih vrednosti, znotraj teh intervalov pa lahko zavzamejo poljubne vrednosti. Rezultat optimizacije je pričakovan, kontaktni razmerji v obeh metodah zavzameta celoštevilčni vrednosti 1 oziroma 2, namenski funkciji r_{11} in r_{12} , pa sta enaki nič v skladu s primerom a) v razdelku 4.1. Optimizacija v prvem primeru je popolna, ker obe nestabilni območiji v celoti izgineta. Rešitev je optimalna v Paretovem smislu, ker ne obstaja nobena druga rešitev, ki bi nad to rešitvijo dominirala. V drugem primeru razen faznega koeficienta $d_1 = 0$ predpišemo še vrednost kontaktnega razmerja $c_1 = 1.5$, v minimizaciji nestabilnih območij pa

iščemo optimalne vrednosti kontaktnega razmerja c_2 in faznega koeficienta d_2 . Rezultat minimizacije se v obeh metodah ujema z izsledki primera b) v razdelku 4.1, to je z enakima vrednostima kontaktnega razmerja $c_1=c_2=1.5$ in vrednostjo faznega koeficienta $d_2=0.5$ ob maksimalnih vrednostih namenskih funkcij r_{11}^1 in r_{12}^1 . Nestabilni območji se zaradi tega prav nič ne zmanjšata in rešitev ni optimalna v Paretovem smislu.

Tabela 1. Večkriterijska optimizacija po metodi utežne vsote

Primer	Metoda utežne vsote				
	Omejitvene enačbe	Omejitvene neenačbe	Optimalne vrednosti spremenljivk	Območje nestab., min. namenska funkcija	Min. utežna vsota
1. pr.	$d_1=0$	$1 \leq c_1, c_2 \leq 2$ $0 \leq d_2 \leq 1$	$c_1=c_2=2$ $d_2=0.482864$	$\Omega \approx 2\omega_3, \Gamma_{11}^1=0$ $\Omega \approx \omega_2 + \omega_3, \Gamma_{12}^1=0$	$\sum_{q=1}^2 w_q \Gamma_{1,q}^1 = 0$
2. pr.	$c_1=1.5,$ $d_1=0$	$1 \leq c_1, c_2 \leq 2$ $0 \leq d_2 \leq 1$	$c_2=1.5$ $d_2=0.5$	$\Omega \approx 2\omega_3, \Gamma_{11}^1=0.022445$ $\Omega \approx \omega_2 + \omega_3, \Gamma_{12}^1=0.582887$	$\sum_{q=1}^2 w_q \Gamma_{1,q}^1 = 0.028274$
3. pr.	$d_1=0,$ $d_2=0.5$	$1 \leq c_1, c_2 \leq 2$ $0 \leq d_2 \leq 1$	$c_1=c_2=2$	$\Omega \approx 2\omega_3, \Gamma_{11}^1=0$ $\Omega \approx \omega_2 + \omega_3, \Gamma_{12}^1=0$	$\sum_{q=1}^2 w_q \Gamma_{1,q}^1 = 0$

Primer	Metoda ϵ - omejitvev				
	Omejitvene enačbe	Omejitvene neenačbe	Optimalne vrednosti spremenljivk	Vrednost nam. funkcije z ϵ - omejitvijo	Minimizirana namenska funkcija
1. pr.	$d_1=0$	$1 \leq c_1, c_2 \leq 2$ $0 \leq d_2 \leq 1$ $\Gamma_{12}^1 \leq \epsilon = 0.291$	$c_1=1, c_2=2$ $d_2=1$	$\Gamma_{12}^1 = 0$	$\Gamma_{11}^1 = 0$
2. pr.	$c_1=1.5,$ $d_1=0$	$1 \leq c_1, c_2 \leq 2$ $0 \leq d_2 \leq 1$ $\Gamma_{12}^1 \leq \epsilon = 1.42$	$c_2=1.5$ $d_2=0.5$	$\Gamma_{12}^1 = 0.582887$	$\Gamma_{11}^1 = 0.022445$
3. pr.	$d_1=0,$ $d_2=0.5$	$1 \leq c_1, c_2 \leq 2$ $0 \leq d_2 \leq 1$ $\Gamma_{12}^1 \leq \epsilon = 0.291$	$c_1=c_2=2$	$\Gamma_{12}^1 = 0$	$\Gamma_{11}^1 = 0$

Tabela 2. Večkriterijska optimizacija po metodi ϵ - omejitvev

V tretjem primeru predpišemo vrednosti obeh faznih koeficientov in sicer $d_1=0, d_2=0.5$, v postopku minimizacije nestabilnih območij $\Omega \approx 2\omega_3$ in $\Omega \approx \omega_2 + \omega_3$ pa iščemo optimalni vrednosti obeh kontaktnih razmerij c_1 in c_2 . V obeh metodah večkriterijske optimizacije dobimo optimalni vrednosti $c_1=c_2=2$ in vrednosti namenskih funkcij $r_{11}^1 = r_{12}^1 = 0$. Rezultat nam pove, da obe nestabilni območji izgineta in ustreza primeru a) iz razdelka 4.1. Rešitev je optimalna v Paretovem smislu.

5. Zaključek

V raziskavi smo razvili sistematični matematični model za analizo stabilnosti dvostopenjskih zobniških gonil kot posledice časovno spremenljive zobne togosti. Meje stabilnosti smo s predstavljenim modelom dobili v analitični obliki. V članku smo raziskali pogoje, ob katerih lahko odpravimo vsa območja nestabilnosti, prav tako pa smo našli pogoje, pri katerih

odprava enega območja nestabilnosti povzroči povečanje drugih nestabilnih območij. S pomočjo teoretičnih izsledkov smo potrdili rezultate večkriterijske optimizacije z metodo utežne vsote in z metodo ϵ - omejitvev v treh karakterističnih primerih.

Zahvala

Avtor se zahvaljuje Javni Agenciji za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije (ARRS), za podporo tega dela v okviru temeljne raziskave J2-9224, Ministrstvu za izobraževanje, znanost in šport Republike Slovenije in Evropskemu skladu za regionalni razvoj.

Literatura

1. M. Benton, A. Seireg, *Simulation of Resonances and Instability Conditions in Pinion-Gear Systems*, ASME J. Mech. Des.. 100, 26--30, 1978.
2. K. Deb, *Multi-Objective Optimization using Evolutionary Algorithms*, John Wiley&Sons, Inc., 2001.
3. P. Friedmann, C.E Hammond, T-H Woo, *Efficient numerical treatment of periodic systems with application to stability problems*, Int. J. numer. Meth. Engng. 11, 1117-1136,1977.
4. R. Pušenjak, *Nestabilnost dvostopenjskih zobniških gonil kot posledica spremenljive zobne togosti v ubiranju*, Slovensko društvo za mehaniko, Kuhljevi dnevi 19, Strunjan, 26.-27. sept 2019, 115-122.
5. G. V. Tordion, R. Gauvin, *Dynamic Stability of a Two-Stage Gear Train Under the Influence of Variable Meshing Stiffness*, ASME J. Eng. Ind. 99, 785--791, 1977.